Nguyen Thi Hien, Nguyen Thi Minh Tam, Do Thi My Linh

THE GENERALIZED THEOREM ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF LIMIT CYCLE AND AN EXAMPLE OF ITS APPLICATION

nthihien5681@gmail.com, ***nguyenthihien@haui.edu.vn***
ntmt1976@gmail.com
linhlinh2108@gmail.com

1. Обобщенная теорема

В выпуклом замкнутом множестве $Q \subset R^2$ рассматривается следующая система

$$\dot{x} = t_x f(x), \tag{1}$$

где $t_x f(x)$ – проекция вектора $f(x)$ на $T_Q(x)$ – касательный конус к Q в точке x (см. [1]). Теперь обобщенная теорема формулируется следующим образом.

Пусть выполнены следующие условия:

$$f : Q \to R^2 \text{ – липшицева функция;} \tag{2}$$

$$Q \neq R^2 \text{ – выпуклое замкнутое множество;} \tag{3}$$

$$x^* \in \operatorname{int} Q; \tag{4}$$

$$f(x) \notin N_Q(x) \text{ при } x \neq x^*, \tag{5}$$

где $N_Q(x)$ *– нормальный конус к* Q *в точке* x *(см. [1]);*

$$\left(B(x-x^*), f(x)\right) \geq m\left(\left\|x-x^*\right\|\right), \tag{6}$$

где B *– некоторая симметрическая положительно определенная матрица,* m *– непрерывная функция,* $m(a) > 0$ *при* $a > 0$*;*

$$\left|\left(f(x), C(x-x^*)\right)\right| \geq u_0 \left\|x-x^*\right\|^2, \tag{7}$$

где $u_0 > 0$ *и* $Cx = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

Тогда система (1) *имеет единственную замкнутую проекцию, которая орбитально устойчива и в которую вливаются при* $t \to +\infty$ *траектории всех решений данной системы.*

Доказательство. Сначала заметим, что справедливы следующие соотношения:

$$N_Q(x) = N_{Q-x^*}(x-x^*) \tag{8}$$

и

$$T_Q(x) = T_{Q-x^*}(x-x^*). \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что соотношение (8) вытекает из определения нормального конуса. Действительно,

$$y \in N_Q(x) \Leftrightarrow \forall\left(x \in Q\right)\left[\left(y, x - x\right) \leq 0\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\left(\bar{x} = x - x^* \in Q - x^*\right)\left[\left(y, \bar{x} - (x-x^*)\right) = \left(y, x\right) \leq 0\right] \Leftrightarrow y \in N_{Q-x^*}(x-x^*).$$

Соотношение (9) непосредственно следует из (8).

Для доказательства этой обобщенной теоремы сделаем замену переменных. Положим

$$z := x - x^* \text{ и } F(z) := f(x + x^*) = f(x). \qquad (10)$$

Отсюда вытекает, что если $x \in Q$, то $z \in Q - x^*$. С помощью (10) и (8) нетрудно проверить, что все условия теоремы о существовании и единственности предельного цикла (см. [2]) выполнены для функции $F(z)$, $z \in Q - x^*$ и, тем самым, доказана эта обобщенная теорема.

2. Пример применения обобщенной теоремы

2.1. Постановка задачи

Пусть множество $Q \subset R^2$ – выпуклый четырехугольник, вершинами которого являются следующие точки: $X_1 = \left(\frac{b}{k}, b\right)$; $X_2 = (0,0)$; $X_3 = (-a, ka)$ и $X_4 = (-a, b)$, где $a, b, k > 0$ и $b > ak$. Определим следующие единичные векторы:

$$n_1 = \begin{pmatrix} \frac{k}{\sqrt{k^2+1}} \\ \frac{-1}{\sqrt{k^2+1}} \end{pmatrix}; n_2 = \begin{pmatrix} \frac{-k}{\sqrt{k^2+1}} \\ \frac{-1}{\sqrt{k^2+1}} \end{pmatrix}; n_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } n_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что множество Q можно представить в виде пересечения четырех полупространств Q_i $\left(i = \overline{1,4}\right)$, где полупространство Q_i является множеством векторов $x \in R^2$, удовлетворяющих неравенству $\left(n_i, x - X_i\right) \le 0$. На этом множестве Q рассматривается система (1), в которой $f(x) = A(x - x^*)$, где

$$A = \begin{pmatrix} a & -e \\ e & b \end{pmatrix}, \quad a, b, e > 0;$$

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} \in \operatorname{int} Q,$$

следовательно,

$$-a < x_1^* < \frac{b}{k} \text{ и } k\left|x_1^*\right| < x_2^* < b. \qquad (11)$$

Вопрос заключается в том, при каком условии на положительное число e все условия обобщенной теоремы для системы (1) будут выполнены.

2.2. Теорема о замкнутой траектории

Существует такое положительное число e_0, что для любого $e > e_0$ система (1) имеет единственную замкнутую траекторию, которая орбитально устойчива и в которую вливаются при $t \to +\infty$ траектории всех решений данной системы.

Доказательство. Заметим, что в силу определения множества Q и функции $f(x)$ безусловно будут выполнены условия (2) – (7). При этом, в условии (2) константой Липшица функции f является величина

$$L = \max\left\{\sqrt{a^2+e^2}, \sqrt{b^2+e^2}\right\}. \tag{12}$$

Легко видеть, что независимо от e условие (6) будет выполнено. Действительно, в (6) в качестве симметричной положительно определенной матрицы B возьмем единичную двумерную матрицу, тогда

$$\left(B(x-x^*), f(x)\right) = \left(\begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a(x_1-x_1^*) - e(x_2-x_2^*) \\ e(x_1-x_1^*) + b(x_2-x_2^*) \end{pmatrix}\right)$$

и, следовательно,

$$\left(B(x-x^*), f(x)\right) = a(x_1-x_1^*)^2 + b(x_2-x_2^*)^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\left(B(x-x^*), f(x)\right) \ge \min\{a, b\}\left\|x-x^*\right\|^2,$$

где $\left\|x-x^*\right\| = \sqrt{(x_1-x_1^*)^2+(x_2-x_2^*)^2}$.

Теперь найдем e так, чтобы было выполнено условие (7).

$$\left|\left(f(x), C(x-x^*)\right)\right| = \left|\left(\begin{pmatrix} a(x_1-x_1^*) - e(x_2-x_2^*) \\ e(x_1-x_1^*) + b(x_2-x_2^*) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -(x_2-x_2^*) \\ x_1-x_1^* \end{pmatrix}\right)\right| =$$

$$= \left|e\left\|x-x^*\right\|^2 - (b-a)(x_1-x_1^*)(x_2-x_2^*)\right|,$$

следовательно,

$$\left|\left(f(x), C(x-x^*)\right)\right| \ge \left(e - \frac{|b-a|}{2}\right)\cdot\left\|x-x^*\right\|^2.$$

Поэтому нетрудно видеть, что условие (7) выполнено, если

$$e > \frac{|b-a|}{2} =: e_1. \tag{13}$$

Нам остается найти условие на e для того, чтобы (5) было выполнено. Заметим, что если $x \in \operatorname{int} Q$, то условие (5) безусловно выполнено. Пусть x лежит на границе этого множества. На стороне X_1X_2, являющейся частью прямой $d_1 : (n_1, x) = \dfrac{kx_1 - x_2}{\sqrt{k^2+1}} = 0$, вычислим скалярное произведение $\left(f(x), u_1\right)$, где $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}$ – направляющий вектор этой прямой

$$\left(f(x), u_1\right) = \left(\begin{pmatrix} a(x_1-x_1^*) - e(x_2-x_2^*) \\ e(x_1-x_1^*) + b(x_2-x_2^*) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}\right).$$

Следовательно,

$$\left(f(x), u_1\right) = (a+bk^2)x_1 + e(x_2^* - kx_1^*) - (ax_1^* + bkx_2^*).$$

Отсюда вытекает, что на прямой d_1 $\left(f(x),u_1 \right)=0$ только в одной точке, первая координата которой равна

$$x_1 = \frac{-e(x_2^* - kx_1^*) + a x_1^* + b kx_2^*}{a + bk^2}.$$

Поэтому на X_1X_2 условие (5) будет верно, если

$$\frac{-e(x_2^* - kx_1^*) + a x_1^* + b kx_2^*}{a + bk^2} < 0;$$

из этого и неравенства (11) следует, что

$$e > \frac{a x_1^* + b kx_2^*}{x_2^* - kx_1^*} =: e_2. \tag{14}$$

Аналогично, на сторонах X_2X_3, X_3X_4 и X_4X_1, соответственно, вычислим скалярные произведения $\left(f(x),u_2 \right)$, $\left(f(x),u_3 \right)$ и $\left(f(x),u_4 \right)$, где

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ k \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В результате вычисления получим, что

$$\left(f(x),u_2 \right) = -(a + bk^2)x_1 - e(x_2^* + kx_1^*) + a x_1^* - b kx_2^*;$$

$$\left(f(x),u_3 \right) = b x_2 - e(a + x_1^*) - b x_2^*;$$

$$\left(f(x),u_4 \right) = a x_1 - e(b - x_2^*) - a x_1^*.$$

Нетрудно видеть, что условие (5) будет выполнено на сторонах X_2X_3, X_3X_4 и X_4X_1, если, соответственно, верны следующие неравенства:

$$-\frac{e(x_2^* + kx_1^*) - a x_1^* + b kx_2^*}{a + bk^2} < -a; \quad \frac{e(a + x_1^*) + b x_2^*}{b} > b; \quad \frac{e(b - x_2^*) + a x_1^*}{a} > \frac{b}{k}.$$

Отсюда и из неравенства (11) вытекает, что

$$e > \frac{a(a + bk^2) + a x_1^* - b kx_2^*}{x_2^* + kx_1^*} =: e_3; \tag{15}$$

$$e > \frac{b(b - x_2^*)}{a + x_1^*} =: e_4; \tag{16}$$

$$e > \frac{a(b - kx_1^*)}{k(b - x_2^*)} =: e_5. \tag{17}$$

Из (13) – (17) следует, что если $e_0 = \max\limits_{i=\overline{1,5}} \{e_i\}$, то для любого $e > e_0$ все условия в обобщенной теореме будут выполны и, тем самым, доказана теорема о замкнутой траектории.

2.3. Эксперименты численного анализа

Приведем результаты некоторых экспериментов численного анализа, проведенных с помощью программы Mathematica 7.0 и гладкой модели (см. [3]) для системы (1). Для этого возьмем $a = 0.5$, $b = 1.5$, $k = \sqrt{3}$, $a = 0.1$, $b = 0.2$ и

$x_* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, после этого можно найти $e_0 = 0.34641$ (см. доказательство теоремы о замкнутой траектории).

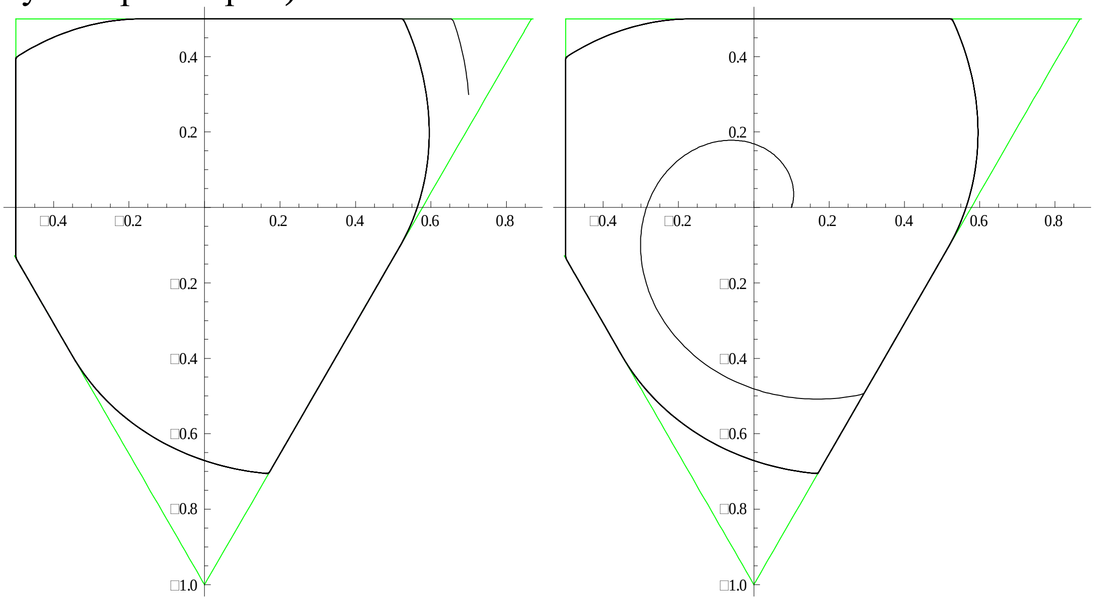

Рис. 1. Замкнутая траектория

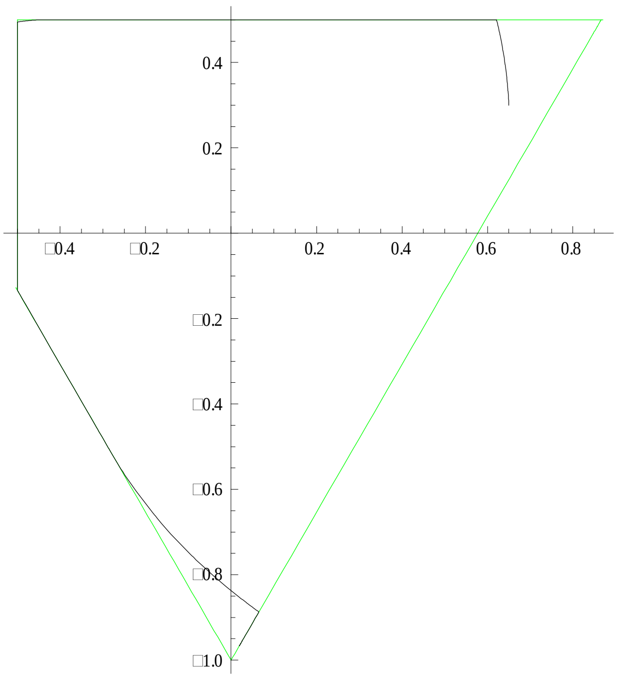

Рис. 2. Незамкнутая траектория

Если возьмем $e = 0.35641 > e_0$, то решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию

$$x(t_0) = x_0 \in Q \tag{18}$$

имеет замкнутую траекторию. На рис. 1 изображены траектории решений, удовлетворяющих разным начальным условиям. Из этого рисунка следует вывод: при $e > e_0$ все траектории втекают в одну единственную замкнутую траекторию, лежащую в множестве Q.

Если возьмем $e = 0.24641 < e_0$, то на множестве Q решение системы (1) с начальным условием (18) не имеет замкнутой траектории (см. рис. 2).

Список использованных источников

1. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом, М., 1983.

2. Лобанова О.А., Садовский Б.Н., О двумерных динамических системах с ограничением// Дифф. Ур., 2007, т. 43, №4, с. 449-456.

3. Нгуен Тхи Хиен. О точности гладкой модели системы с диодной нелинейностью// Вестник ВГУ, Серия: Физика, Математика, 2010, №2, с. 240-243.

Novikov E.I., Rogozin M.V.

APPROACH TO EVALUATING CHANGES IN THE STRUCTURE OF TIME SERIES

rogozinmv@bk.ru

Для описания поведения социально-экономических показателей во времени используется математические модели временных рядов, основной целью построения которых является расчет прогнозных значений изучаемого показателя. Наличие структурных изменений временного ряда свидетельствует о том, что на изучаемый показатель влияют неслучайные факторы, что в свою очередь приводит к изменению параметров модели временного ряда.

Наиболее распространенными способами проверки временных рядов на структурную стабильность являются: тест Чоу, предсказательный тест Чоу, CUSUM тест, CUSUMSQ тест, рекурсивный тест и тест Хансена [1]. Точность результатов представленных выше тестов сильно зависит от качества подобранной модели временного ряда.

Исходя из этого, предлагается подход к определению структурных изменений временного ряда, основанный на расчете и анализе точечных и интервальных оценок его числовых характеристик. В качестве предпосылки применения такого подхода выступает понятие стационарности временного ряда в широком смысле [2]. Временной ряд является стационарным в широком смысле, если для него выполнены следующие условия:

$$M(X) = m; \qquad (1)$$

$$D(X) = s^2; \qquad (2)$$

$$Cov(X_t, X_{t+t}) = y(t) \text{ для любых } t \text{ и } \tau, \qquad (3)$$

где $M(X)$ - математическое ожидание величины X; $D(X)$ - дисперсия величины X; $Cov(X_t, X_{t+1})$ - ковариация между величинами X_t и X_{t+1}.

Данный подход подразумевает использование понятия скользящего окна. Под скользящим окном в данном случае понимается временной интервал, содержащий определенное количество значений изучаемого показателя, который смещается по временной последовательности на единицу наблюдения.